开关转换器动态分析采用快速分析技术

安森美半导体　Christophe Basso

如果采用网格节点(mesh-node)分析能很好地求解电路的传递函数,那么立即获得一个有意义的符号公式通常是不可能的,需要额外的工作才能得出。应用经典的分析技术来获得所谓的低熵表达式,即分数形式,从中您可识别增益、极点和零点,往往导致如 Middlebrook 博士曾在他的参考文献[1]、[2]中提到的代数失效(algebraic paralysis)。在此,快速分析电路技术(FACTs)可帮助您基于在大学里学到的东西而扩展,以大大简化分析。通过使用 FACTs,不仅加快您的执行速度,而且最终结果将以有序的多项式形式出现,通常无需进一步的因子分解工作[3-4]。

本文首先介绍后文用于确定开关转换器的控制到输出传递函数的 FACTs。这个主题很大,在此我们只谈及表面,希望激励您进一步挖掘这个主题。我们选择了电压模式耦合电感单端初级电感转换器(SEPIC)工作于非连续导电模式(DCM)。PWM 开关[5]将用于形成小信号模型。

快速分析技术(FACTs)简介

FACTs 背后的基本原理在于电路时间常数的确定 $\tau=RC$ 或 $\tau=L/R$,此时在两种不同的条件下观察所研究的电路:当激励信号降至 0 时和响应清 0 时,通过使用这种技术,您将体会到确定特定传递函数有多快和直观。基于这种方法的分析技术始于几十年前,如参考文献[6]、[7]中记载的。

传递函数是一种数学关系,它把激励信号、激励物和由这种激励产生的响应信号联系起来。如果我们考虑一个线性时不变(LTI)系统无延时,具有静态增益 H_0,例如开关转换器的线性理想功率级,其连接控制信号 V_{err}(激励)和输出 V_{out}(响应)的传递函数 H 可表示为:

$$H(s)=\frac{V_{out}(s)}{V_{err}(s)}=H_0\frac{N(s)}{D(s)} \tag{1}$$

首项 H_0 是系统在 $s=0$ 评估表现出的增益或衰减,该项将带传递函数的单位(或维度),如果有的话。如果响应和激励都用伏特表示,在此表示为 V_{err} 和 V_{out},H 是没有单位的。分子 N(s)控制传递函数的零点,数学意义上,零点是函数幅值为 0 的根。通过 FACTs,我们用数学抽象思维轻松地揭开这些零点。我们不会像通常在谐波分析($s=j\omega$)中所做的仅仅考虑在 s 平面的垂直轴,而是覆盖考虑到负数根的整个平面。因此,如果电路存在零点,将表现为当输入信号调到零角频率 s_z 时,无信号的输出响应。在这种情况下,在变形的电路中的一些阻抗阻挡了信号传播,响应为 0,尽管存在激励源:当变形的电路在 $s=s_z$ 点被激励时,在信号路径的串联阻抗趋于无穷或分支将该激励分流到地面。请注意,这种方便的数学抽象通过观察提供了巨大的帮助来找到零点,通常无需写一行无源电路的代数。图 1 提供了简单的流程图,详细介绍了过程。关于这种方法的更多细节见参考文献[8]。

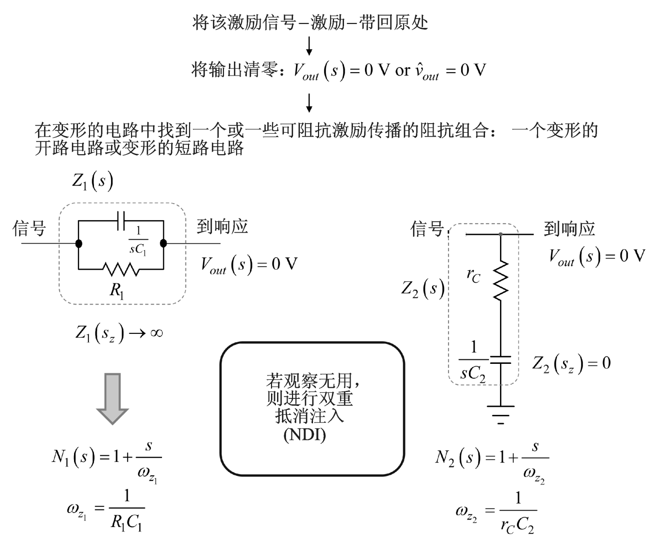

图 1　这个流程图将指导您用最简单的方法确定零点,在观察无用时,将需要进行双重抵消注入或 NDI

分母 D(s)由电路自然时间常数构成。通过设置激励信号为 0 和确定从电路中临时移除的所考虑的电容或电感"所示"的阻抗,来得出这些时间常数。通过"观察",可想象把一个欧姆表置于暂时移除的储能元件(C 或 L),并读取它显示的电阻。这其实是个相当简单的运用,正如图 2 中的第二个流程图所详述的。

看到图 3 是一个涉及注入源的一阶无源电路加偏压于左边网络。输入信号 V_{in} 通过网格和节点传播形成所看到的电阻 R_3 上的响应 V_{out}。我们感兴趣的是导出连接 V_{out} 和 V_{in} 的传递函数 G。

为确定本例电路的时间常数,将激励源设为 0(由短路代替 0 V 电压源,开路代替 0 A 电流源),拆下电容器。然后,连接一个欧姆表来确定电容器端提供的电阻。图 4 指导您进行这些步骤。

如果用图 4 的做法,您"看到" R_1 与 R_2 并联后与 R_4 串联,所有这些与 R_3 并联后与 r_C 串联。该电路的时间常

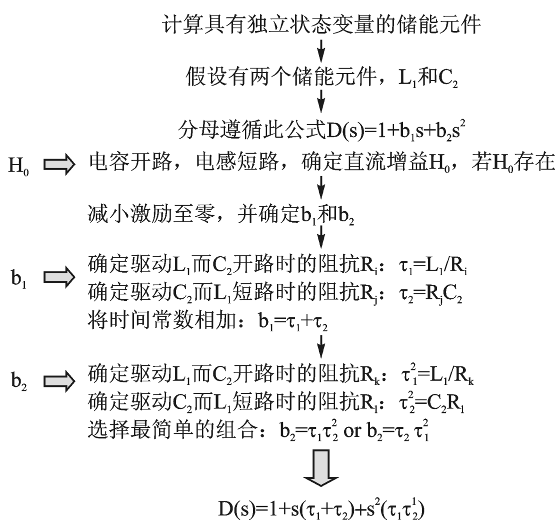

图 2　该流程图解释了用于确定电路时间常数的方法

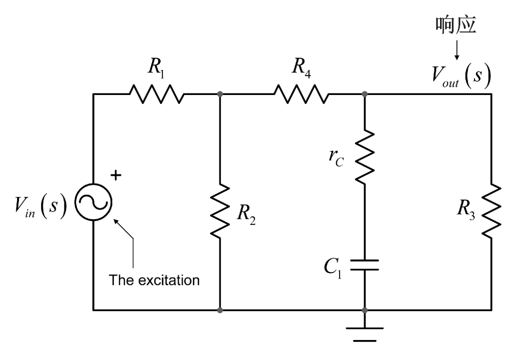

图 3　确定电路的时间常数需要将激励源设为 0，并观察从电路中暂时移除的能量存储元件所提供的电阻

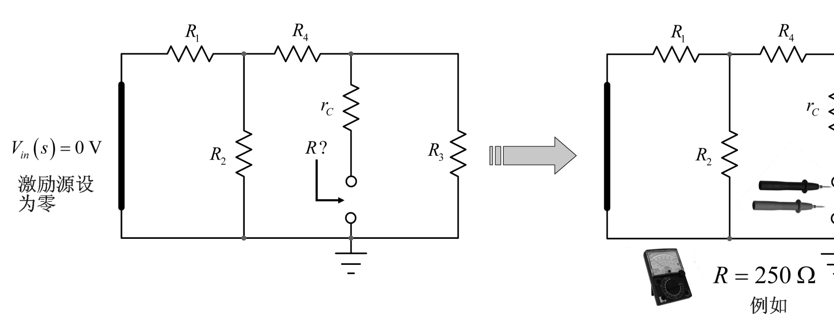

图 4　由短路代替 0V 源后确定电容器端的电阻

数只通过 R 和 C_1 即可计算得出：

$$\tau_1 = [r_C + (R_4 + R_1 \,||\, R_2) \,||\, R_3] C_1 \quad (2)$$

可证明第一阶系统的极点是其时间常数的倒数。因此：

$$\omega_p = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{[r_C + (R_4 + R_1 \,||\, R_2) \,||\, R_3] C_1} \quad (3)$$

现在，s=0 时该电路的准静态增益是多少？在直流条件下，电感器短路，电容器开路。把这概念应用于图 3 的电路，绘制成如图 5 所示的电路。想象在 R_4 前断开连接，会看到一个含 R_1 和 R_2 的电阻分压器。R_2 上的戴维宁(Thévenin)电压为：

$$V_{th} = V_{in}\frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (4)$$

输出电阻 R_{th} 是 R_1 与 R_2 并联的值。因此完整的传递函数涉及到电阻分压器(由与 R_{th} 串联的 R_4 和加载的 R_3 所构成)。r_C 是断开的，由于电容 C_1 在这直流分析中被移除。因此：

$$G_0 = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \times \frac{R_3}{R_4 + R_3 + R_1 \,||\, R_2} \quad (5)$$

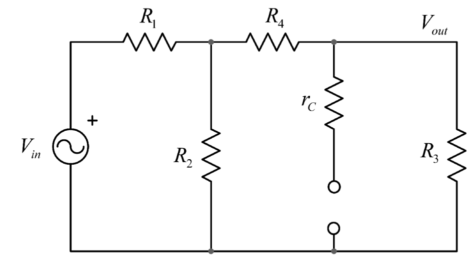

图 5　断开直流电路中的电容器，计算简单的电阻配置的传递函数

基本就是这些了，我们正错过零点。在前文提到，零点通过阻断激励信号的传播而在电路中表现出来，产生一个无信号的输出响应(见图 1)。若我们考虑一个变形的电路，其中 C_1 由 $1/sC_1$ 代替，如图 6 所示，当激励源加偏压于电路，有什么特定的条件意味着无信号响应？无信号响应只意味流过 R_3 的电流为 0。这不是短路，而是相当于虚拟的接地。

如果在 R_3 中没有电流，那么串联的 r_C 和 $1/sC_1$ 转化为短路：

$$Z_1(s_z) = r_C + \frac{1}{s_z C_1} = 0 \quad (6)$$

根 s_z 是我们想要的零点位置：

$$s_Z = -\frac{1}{r_C C_1} \quad (7)$$

从而有：

$$\omega_z = \frac{1}{r_C C_1} \quad (8)$$

现在我们可组合所有这些结果，形成以图 3 电路为特征的最终的传递函数：

$$G(s) = \frac{R_2}{R_2 + R_1}\,\frac{R_3}{R_4 + R_3 + R_1 \,||\, R_2}\,\frac{1 + s r_C C_1}{[r_C + (R_4 + R_1 \,||\, R_2) \,||\, R_3] C_1} = G_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (9)$$

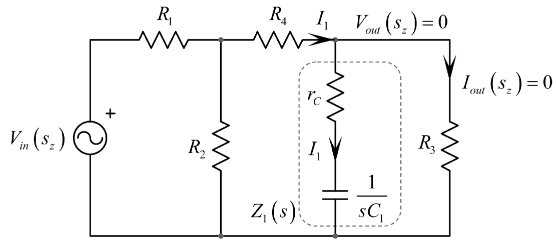

图 6 在这变形的电路中，当串联的 r_C 和 C_1 转化为变形的短路，响应消失，R_3 中无电流流过

这就是所谓的低熵表达式，从中您可立即识别静态增益 G_0、极点 ω_p 和零点 ω_z。高熵表达式将在考虑阻抗分压器时通过施加大规模外力到原来的电路来获得，如：

$$G(s)=\frac{R_2}{R_2+R_1}\frac{R_3\ ||\ \left(r_C+\frac{1}{sC_1}\right)}{R_3\ ||\ \left(r_C+\frac{1}{sC_1}\right)+R_4+R_1\ ||\ R_2} \tag{10}$$

您不只在推导表达式时可能会出错，而且将结果格式化到如式(9)这样需要更多的精力。另外，请注意，在这个特定的例子中，在写式(9)时我们没有写一行代数。如果我们后来发现一个错误，那么很容易回到一个单独的图纸并单独修复它。式(9)的校正很简单，现尝试对式(10)进行相同的修正，您可能会从头开始。

FACTs 应用于二阶系统

FACTs 同样适用于 n 阶无源或有源电路。通过计算状态变量是独立的储能元件的数量来确定电路的阶数。若我们考虑一个具有有限的静态增益 H_0 的二阶系统，其传递函数可表示如下：

$$H(s)=H_0\frac{1+a_1s+a_2s^2}{1+b_1s+b_2s^2} \tag{11}$$

当 H_0 带传递函数的单位，那么 N:D 的比值是没有单位的。这意味着 a_1 和 b_1 的单位是 s。当 a_1 无信号响应，b_1 的激励源为 0，可将确定的时间常数相加。对于二阶系数 a_2 或 b_2，维度是时间的平方[s^2]，将时间常数结合为一个产物。然而，在这时间常数产物中，您重用了已经确定为 a_1 或 b_1 的一个时间常数，而二阶时间常数的确定需要一个不同的符号：

$$\tau_2^1 \text{ or } \tau_1^2 \tag{12}$$

在这个定义中，设置标号出现在“幂”中的储能元件处于高频状态(电容被短路，电感被开路)，当我们暂时从电路中移除二阶元件端(参见下标)，您可从中确定电阻。当 a_2 必须为无信号的输出和 b_2 的激励源减为 0 时，可以运用此法。当然，当观察有用时，它总是最快和最高效的得出 N 的方法。乍一看有点难以理解，但没有什么不可克服的，我们用几句话解释您就会明白。

图 7 是一个经典的二阶滤波器，用于确定在连续导通模式(CCM)中工作的电压模式降压转换器的输出阻抗。阻抗是连接一个激励信号 I_{out} 与响应信号 V_{out} 的一个传递函数。此处，I_{out} 是已安装的测试生成器，而 V_{out} 是其两端产生的电压。要从式(11)中确定各种系数，我们可按照图 2 的流程图，从 s=0 开始，如图 7 所示，电感短路，电容开路。该电路是简单的，电流源的电阻 R_0 不过是 r_L 和 R_{load} 简单的并列组合：

$$R_0=r_L\ ||\ R_{load} \tag{13}$$

这个电路中有零点吗？我们看看图 8 所示的变形电路。当激励源电流 I_{out} 调为零角频率 s_z 时，什么样的元件组合将使响应 V_{out} 为 0。我们可发现两个变形的短路涉及 r_L-L_1 和 r_c-C_2。

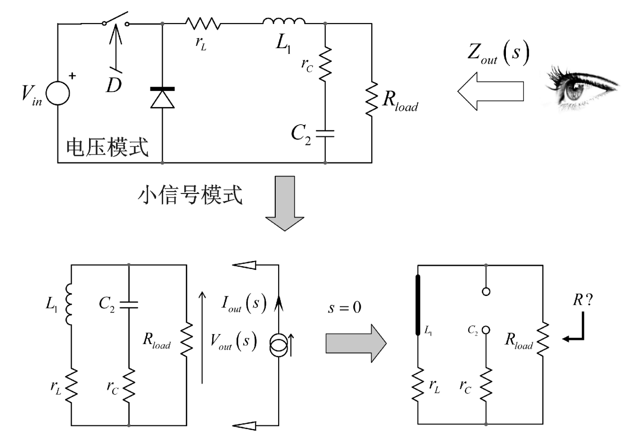

图 7 工作于 CCM 的降压转换器的输出阻抗的确定是一个很好的例子，演示了 FACTs 如何简化分析

立即确定这两个阻抗的根：

$$r_L+sL_1=0\rightarrow s_{z_1}=-\frac{r_L}{L_1} \tag{14}$$

$$r_C+\frac{1}{sC_2}=0\rightarrow s_{z_2}=-\frac{1}{r_CC_2} \tag{15}$$

因此分母 N(s)表示为：

$$N(s)=\left(1+s\frac{L_1}{r_L}\right)(1+sr_CC_2) \tag{16}$$

分母 D(s)的一阶系数 b_1 是由 L_1 两端的阻抗提供，而 C_2 处于直流状态(开路)，有 τ_1，然后看驱动 C_2 而 L_1 设置为直流状态(短路)时的阻抗，得出 τ_2。如图 9 所示，从该草图可立即得出 b_1 的定义：

$$b_1=\tau_1+\tau_2=\frac{L_1}{r_L+R_{load}}+C_2[(r_L\ ||\ R_{load})+r_C] \tag{17}$$

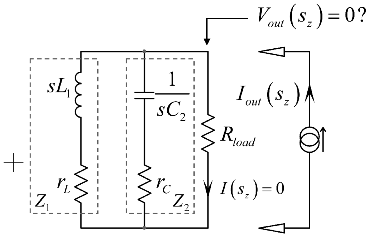

图 8 如果阻抗 Z_1 或 Z_2 转换为短路，响应 V_{out} 为无信号输出

二阶系数 b_2 是用式(12)中引入的符号来

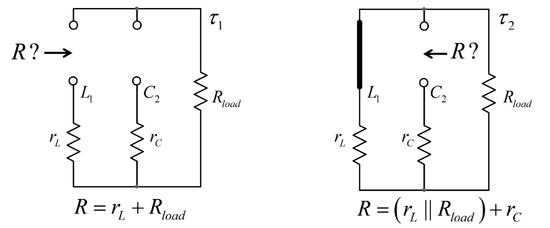

图 9　在选定的组件终端中，当第二个组件处于直流状态时，您会得出阻抗为多少？

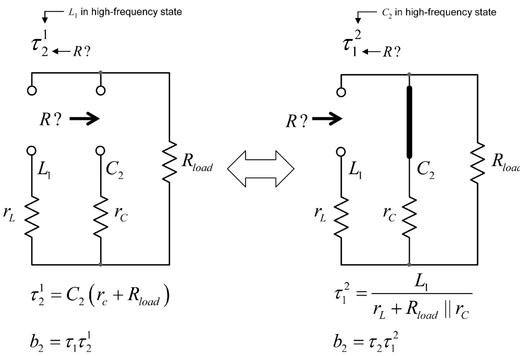

图 10　在选定的组件终端中，当第二个组件处于高频状态时，您会得出阻抗为多少？

确定的。L_1 设置在其高频状态(开路)，驱动 C_2 以得到 τ_2^1 的阻抗，C_2 处于高频状态(短路)，则驱动 L_1 而得到 τ_1^2 的阻抗。图 10 显示了两种可能的整理结果。您通常选择最简单的表达式或避免不确定性的一个，如果有的话(如$\infty \times 0$ 或∞/∞)。下面对于 b_2 的两个定义是相同的，上面的是最简单的：

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= \tau_1\tau_2^1 = \frac{L_1}{r_L + R_{load}} C_2(r_c + R_{load}) \\ b_2 &= \tau_2\tau_1^2 = C_2[r_L \mid\mid R_{load} + r_C] \frac{L_1}{r_L + R_{load} \mid\mid r_C} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

现在我们用所有的成分来组合最终的传递函数，定义为：

$$Z_{out}(s) = (r_L \mid\mid R_{load}) \times \frac{\left(1 + s\frac{L_1}{r_L}\right)(1 + sr_C C_2)}{1 + s\left(\frac{L_1}{r_L + R_{load}} + C_2[r_L \mid\mid R_{load} + r_C]\right) + s^2\left(L_1 C_2 \frac{r_C + R_{load}}{r_L + R_{load}}\right)} \tag{19}$$

我们已经确定了这个传递函数，而没有写一行代数，只是把该电路拆分为几个简单的草图个别解决。此外，正如预期的那样，式(19)已经是一个规范的表达式，可以轻易地看到一个静态增益、两个零点和一个可用谐振分量 ω_0 和品质因数 Q 进一步整理的二阶分母。如果不是迅速考虑 Z_1、Z_2 和 R_{load} 的并联组合，我们不可能得到这一结果。

采用 FACTs，通过观察可导出传递函数，特别是对于无源电路。由于电路复杂，包括电压或电流控制源，观察起来没那么明显，您需要利用经典的网格和节点分析。但 FACTs 提供了几个优点：由于将电路拆分为用于确定最终的多项式表达式系数的小的单个草图，因此如果在最终的表达式中发现一个错误，总是可以回到一个特定的绘图并个别修正。此外，当确定与传递函数的 a_i 和 b_i 相关的项时，自然会得到一个多项式表达式，而不用投入进一步的精力来收集和重新排列这些项。最后，如参考文献[4]所述，在复杂的无源和有源电路中，SPICE 对验证个别极点和零点的计算有很大帮助。

工作于 DCM 的带耦合电感的 SEPIC

SEPIC 是一种流行的结构，常用于输出电压必须小于或大于输入的应用，不会像采用 Buck-Boost 转换器那样损失极性。SEPIC 可采用耦合或非耦合电感工作在连续导通模式(CCM)或非连续导通模式(DCM)。参考文献[9]中探讨了耦合电感的好处，这里不作讨论，我们的兴趣在于确定耦合电感的 SEPIC 在工作于 DCM 时的输出到控制的传递函数。图 11 代表参考文献[10]中所述的自动切换电压控制模式的 PWM 开关和采用一个 SEPIC 配置的连接，特意减少载荷以强制实施 DCM，在启动序列完成后施加一个临时步骤。在类似的工作条件下捕获并仿真一个逐周期电路。

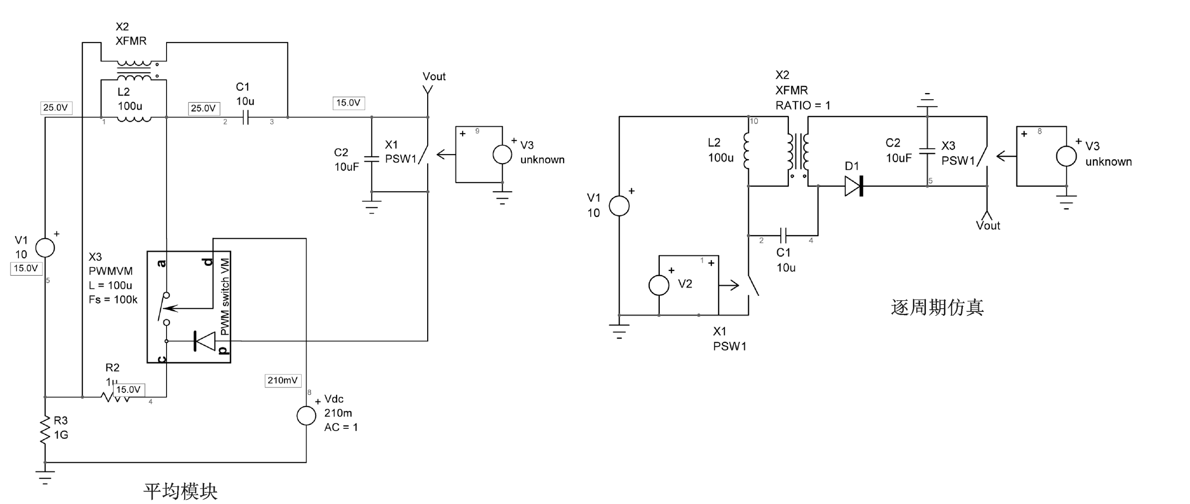

图 11　第一个 SEPIC 采用平均模型，第二个实施逐周期法

运行一个仿真来比较两个电路的输出响应。如图 12 所示，两个电路的响应非常相近。曲线的左边描述了启动序列，右边部分显示了两个模型对负载阶跃的响应。在这一阶段具有相同的响应，第一次表明平均大信号模型正确地仿真 SEPIC 内部，我们可进行小信号版本。

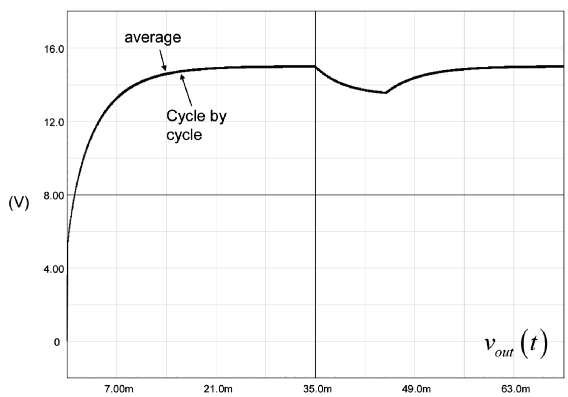

图 12　平均模型与逐周期模型的瞬态响应完全符合

DCM PWM 开关的大信号模型由式(10)中推导出的小信号版本所代替，与参考文献[5]中描述的不同。两个模型得出了相同的分析，但 Vorpérian 博士在参考文献[5]中考虑的是一个常见的配置(C 端是接地的)，而我们为了建立一个自动切换的 DCM-CCM 模型，保留了原普通无源配置。采用 DCM PWM 开关的小信号模型更新的电路图如图 13 所示。右边的参数列表计算分析所需的所有系数 k。

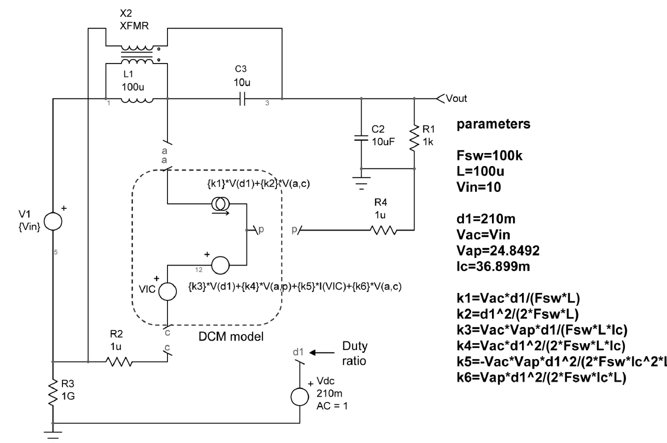

图 13　这是工作在 DCM 模式的 SEPIC 的小信号模型，节点 d_1 是占空比偏差和注入点，所有小信号系数都自动出现在参数窗口

确定准静态增益

为了确定准静态增益，需要按照图 2 使所有电感短路，所有电容开路。这正是 SPICE 在计算工作偏置点时所做的工作。然后重新排列所有的源和组件以简化电路，使其更易于分析。当您做这工作时，建议您始终运行一个全面的检查，确定新电路的动态响应与图 13 完美匹配。如果有任何偏差都表明您出错了，或者简化中的假设过于乐观：重复该做法直到幅值和相位完美匹配为止。组合出图 14 的电路。

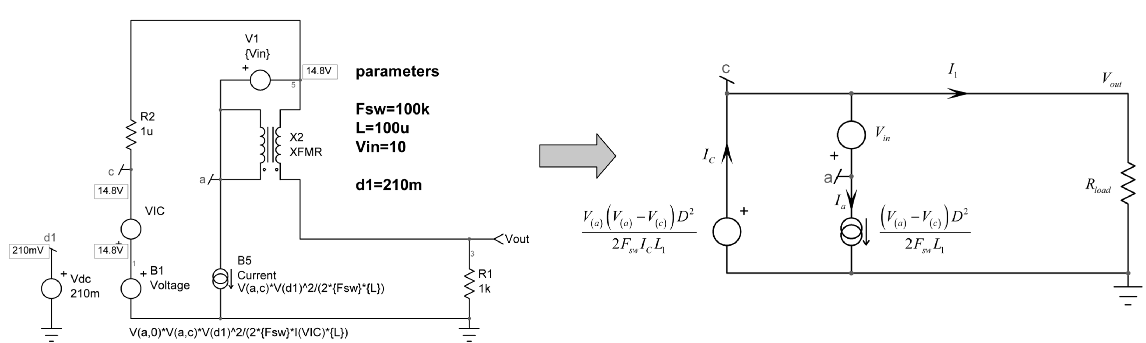

图 14　这是用来确定准静态增益 H_0 的最终直流电路

几行代数将使我们得到输出电压表达式：

$$\frac{V_{out}}{R_{load}}=I_C-\frac{(V_{(a)}-V_{(c)})D^2}{2F_{sw}L_1}\rightarrow I_C=\frac{V_{out}}{R_{load}}+\frac{V_{in}D^2}{2F_{sw}L_1} \tag{20}$$

$$V_{out}=\frac{(V_{out}+V_{in})(V_{out}+V_{in}-V_{out})D^2}{2F_{sw}I_CL_1}=\frac{(V_{out}+V_{in})V_{in}D^2}{2F_{sw}I_CL_1} \tag{21}$$

将式(20)中的 I_c 代入式(21)并求解 V_{out}，得出：

$$V_{out}=DV_{in}\sqrt{\frac{1}{2\tau_L}}\quad \text{with}\ \tau_L=\frac{L_1}{R_{load}T_{sw}} \tag{22}$$

该小信号准静态增益简单地表示为：

$$H_0=\frac{dV_{out}(D)}{dD}=\frac{d}{dD}\left(DV_{in}\sqrt{\frac{1}{2\tau_L}}\right)=V_{in}\sqrt{\frac{1}{2\tau_L}} \tag{23}$$

时间常数的确定

我们将采用 FACTs 并单独确定电路的时间常数，而不是用图 13 的完整原理立刻求解整个传递函数。这种方法提供了一个优势，以处理您通过对单个草图的 SPICE 仿真获得的结果。这大大有助于逐步前进和跟踪错误，而

不至于在大量的工作时间后才发现最终的结果是错误的！

为了确定时间常数，将激励源减为 0(请检查图 2)。在此，由于我们想要控制到输出的传递函数，激励源是 d_1。将其减为 0 有助于简化电路，如图 15 所示。

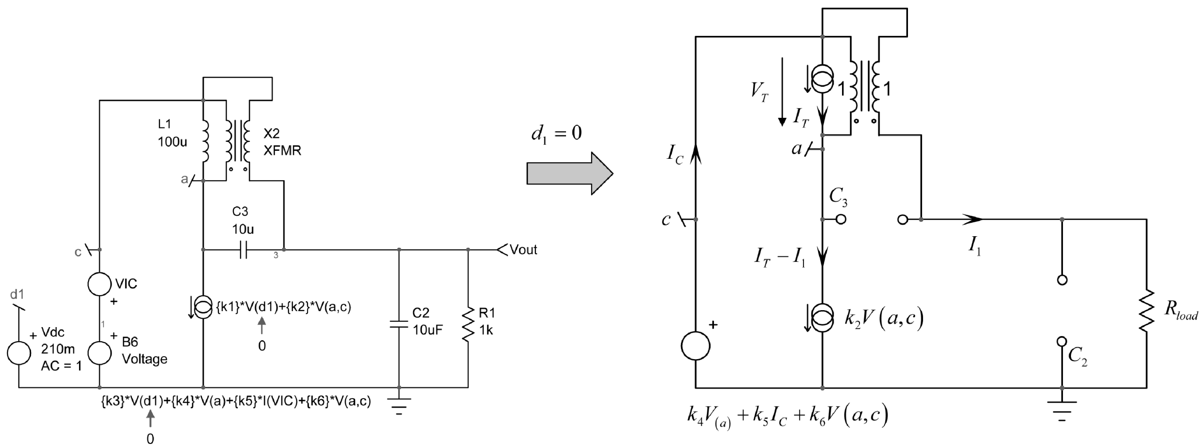

图 15　将激励源减为 0 有助于简化电路，在此我们从驱动电感 L_1 的阻抗开始

可以用几个公式来描述这个电路，我们知道 $I_C = I_T$：

$$V_T = V_{(a)} - V_{(c)} \tag{24}$$

$$V_{(a)} = R_{load} I_1 \tag{25}$$

$$I_T - I_1 = k_2(V_{(a)} - V_{(c)}) \rightarrow V_{(a)} = \frac{I_T + V_{(c)} k_2}{k_2 + \frac{1}{R_{load}}} \tag{26}$$

$$V_{(c)} = k_4 V_{(a)} + k_5 I_C + k_6 V_{(a)} - k_6 V_{(c)} \tag{27}$$

将式(26)代入式(27)，然后解出 $V_{(c)}$，替代式(26)中的 $V_{(c)}$ 解得 $V_{(a)}$，然后可写

$$\frac{V_T}{I_T} = \frac{V_{(a)} - V_{(c)}}{I_T} = \frac{R_{load}(1 - k_4) - k_5}{k_6 + R_{load} k_2 (1 - k_4) + 1} \tag{28}$$

如果您重新排列和由图 13 的定义替换系数 k，得出时间常数 τ_1 的定义：

$$\tau_1 = \frac{L_1}{\frac{R_{load}(1 - k_4) - k_5}{k_6 + R_{load} k_2 (1 - k_4) + 1}} = \frac{L_1}{\frac{R_{load}}{M(1 + M) + 0.5}} \tag{29}$$

二阶时间次常数指的是从 C_2 端看到的阻抗，而 L_1 是短路的。新的电路如图 16 所示。由于 L_1 短路，a 和 c 端在一起，简化更新的电路为右边的图片。

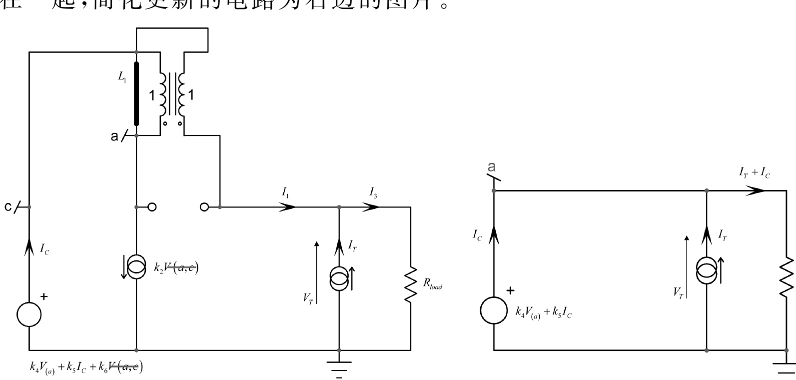

图 16　使电感短路真正简化电路

再一次，几个简单的方程会很快地让您得出结果：

$$V_T = (I_T + I_C) R_{load} \rightarrow I_C = \frac{V_T - I_T R_{load}}{R_{load}} \tag{30}$$

$$V_T = k_4 V_T + k_5 I_C \rightarrow V_T = \frac{k_5 I_C}{1 - k_4} \tag{31}$$

将式(30)代入式(31)，然后解得 V_T 并重新整理。可以发现：

$$\frac{V_T}{I_T} = \frac{k_5}{k_4 + \frac{k_5}{R_{load}} - 1} = \frac{R_{load}}{2} \rightarrow \tau_2 = \frac{R_{load}}{2} C_2 \tag{32}$$

如果您知道试图确定涉及 C_3 的三阶时间常数，变压器配置(完美耦合)使其两端电压等于 0 V：在动态传递函数中电容器不起作用。因此第一个系数 b_1 定义为：

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 = \frac{L_1}{\frac{R_{load}}{M(1 + M) + 0.5}} + \frac{R_{load}}{2} C_2 \approx \frac{R_{load}}{2} C_2 \tag{33}$$

二阶系数

对于二阶系数，将设置电容 C_2 处于其高频状态(以短路代替它)，同时将确定驱动电感 L_1 的阻抗。图 17 说明了这种方法。因为输出因 C_2 短路，节点 a 和 c 都处于相同的 0 V 电势。电路简化为右侧示意图。

可写出描述 V_T 电压的第一个方程。观察到：I_T 和 I_C 是相同的，$V_T = -V_{(c)}$，有

$$V_T = -(k_5 I_C - k_6 V_{(c)}) = -(k_5 I_T + k_6 V_T) \rightarrow$$
$$V_T(1 + k_6) = -k_5 I_T \tag{34}$$

因式分解 V_T / I_T，L_1 两端的阻抗为：

$$\frac{V_T}{I_T} = \frac{k_5}{-1 - k_6} \tag{35}$$

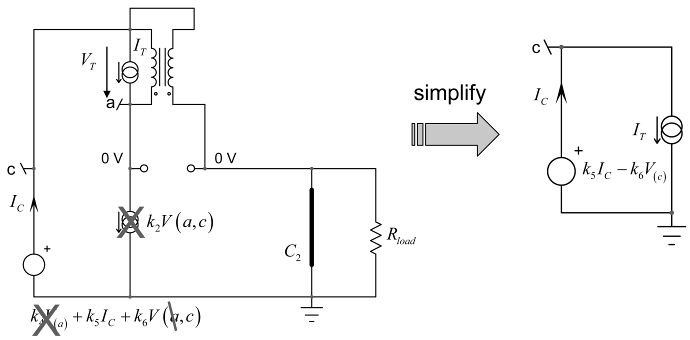

图 17　二阶系数设置储能元件之一处于其高频状态(C_2)，同时您可确定电感两端的电阻

二阶时间常数 τ_1^2 定义为：

$$\tau_1^2=\frac{L_1}{\left(-\frac{k_5}{1+k_6}\right)}=\frac{L_1}{\frac{R_{load}V_{in}^2}{(V_{in}+V_{out})^2}}=\frac{L_1}{R_{load}\left(\frac{1}{1+M}\right)^2} \tag{36}$$

如果认为 $V_{out}=MV_{in}$，b_2 系数表示为：

$$b_2=\tau_2\tau_1^2=\frac{L_1C_2(1+M)^2}{2} \tag{37}$$

合并确定的时间常数，得出分母 D(s)：

$$D(s)=1+b_1s+b_2s^2=1+s(\tau_1+\tau_2)+s^2\tau_2\tau_1^2 \tag{38}$$

如果考虑一个低 Q 值的近似值，这二阶分母可以近似由两级联极点定义为：

$$\omega_{p_1}=\frac{1}{b_1}=\frac{1}{\tau_1+\tau_2}\approx\frac{1}{\tau_2}\rightarrow\omega_{p_1}=\frac{2}{R_{load}C_2} \tag{39}$$

$$\omega_{p_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_2\tau_1^2}\approx\frac{1}{\tau_1^2}\rightarrow\omega_{p_2}=\frac{R_{load}}{L_1}\left(\frac{1}{1+M}\right)^2 \tag{40}$$

和合并为：

$$D(s)\approx\left(1+\frac{s}{\omega_{p_1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{p_2}}\right) \tag{41}$$

零点的确定

如上文所述，当激励源调至零角频率 s_z，变形电路的响应为无信号输出(见图 1)。该运用包括将激励源复原和确定无信号输出的变形电路的条件。图 18 所示为需要研究的更新电路。无信号输出的有趣之处在于其传播至其它节点。例如，如果 $V_{out}=0$ V，然后由于变压器高边连接，节点 a 也处于 0 V，所有涉及该节点的表达式可以简化为如图 18 所示。如果输出无信号，则电流 I_1 也为 0，这意味着 $I_c=I_3$。

节点 c 的电压定义为：

$$V_{(c)}(s)=\frac{D(s)k_3+I_c(s)k_5}{1+k_6} \tag{42}$$

因此，电流 I_c 等于节点 c 的电压除以 L_1 的阻抗。

$$I_c(s)=\frac{\frac{D(s)k_3+I_c(s)k_5}{1+k_6}}{sL_1}\rightarrow I_c(s)=\frac{D(s)k_3}{sL_1(1+k_6)-k_5} \tag{43}$$

而电流 I_3 等于：

$$I_3(s)=k_1D(s)-k_2V_{(c)}=k_1D(s)-k_2sL_1I_c(s) \tag{44}$$

现将式(43)代入式(44)，然后视 $I_c=I_3$：

$$k_1D(s)-k_2sL_1\frac{D(s)k_3}{sL_1(1+k_6)-k_5}=\frac{D(s)k_3}{sL_1(1+k_6)-k_5} \tag{45}$$

求解 s，将系数 k 的值换为它们在图 13 中的值，重新整理，会发现

$$s_z=\frac{R_{load}}{L_1M(1+M)} \tag{46}$$

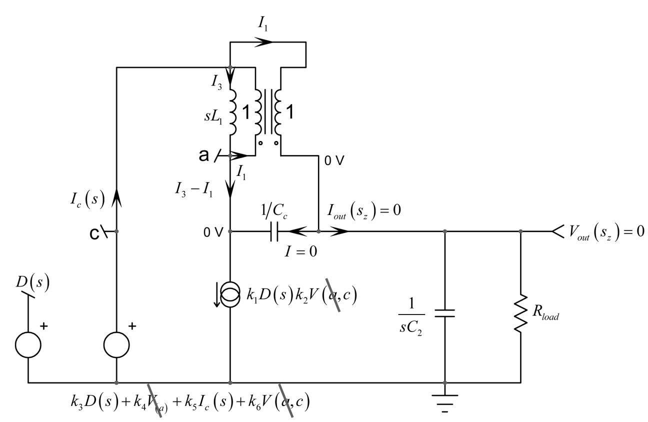

图 18　在 $s=s_z$ 的特定条件下，观察变形的电路，无信号响应

这是个正的根源，因此为右半平面零点。通过收集所有的部分，发现极点和零点实际上是一个 DCM buck-boost 转换器的极点和零点，而得出完整的传递函数：

$$H(s)=H_0\frac{1-\frac{s}{\omega_z}}{\left(1+\frac{s}{\omega_{p_1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{p_2}}\right)} \tag{47}$$

及

$$\omega_{p_1}=\frac{2}{R_{load}C_2} \tag{48}$$

$$\omega_{p_2}=\frac{R_{load}}{L_1}\left(\frac{1}{1+M}\right)^2 \tag{49}$$

$$\omega_z=\frac{R_{load}}{L_1M(1+M)} \tag{50}$$

和

$$H_0=V_{in}\sqrt{\frac{1}{2\tau_L}} \tag{51}$$

最后检查，比较 Mathcad 和图 11 大信号模型的 SPICE 仿真的动态响应。如图 19 所示，曲线完美重合。

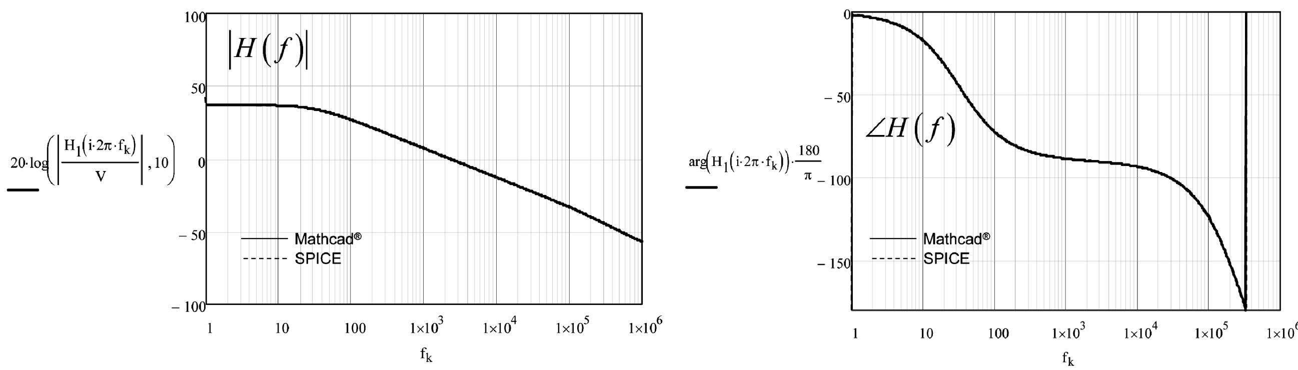

图 19　Mathcad 和 SPICE 提供完全相同的响应(曲线完美叠加)

另一个验证是由采用不同的平均模型(架构参见参考文献[11])仿真相同的 SEPIC 结构构建。这也是一个自动切换的 CCM－DCM 模型,但走线方式稍有不同。图 20 所示为两种平均模型采用一个类似的 SEPIC 架构。

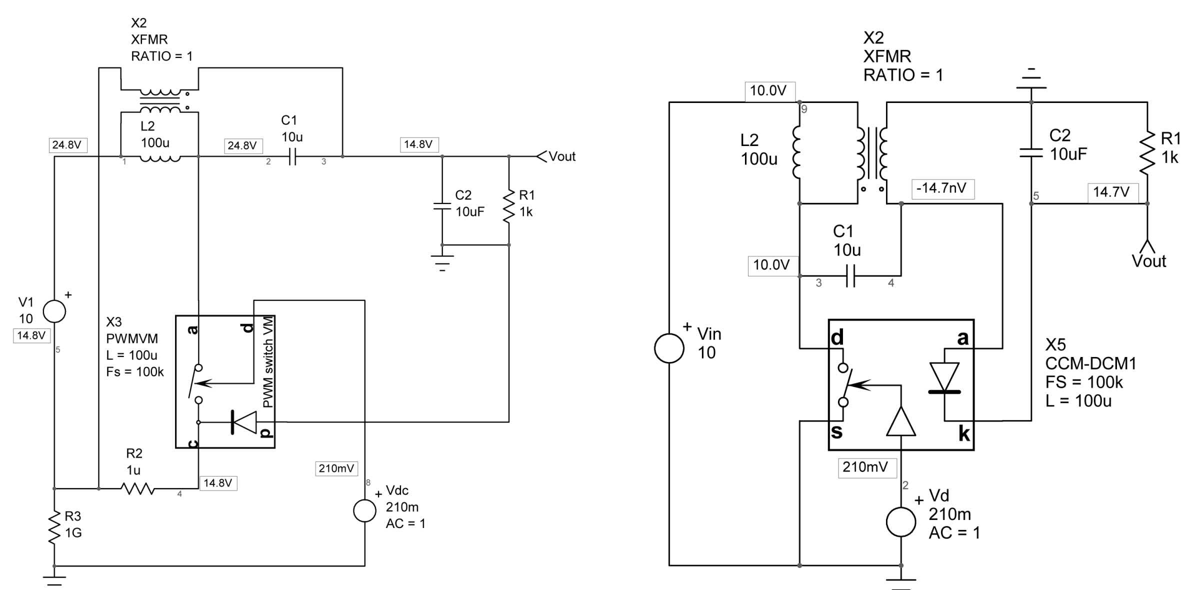

图 20　CoPEC 平均模型包括单独的开关和二极管连接

图 21 证实了两个交流响应在相位和幅值上完全相同。

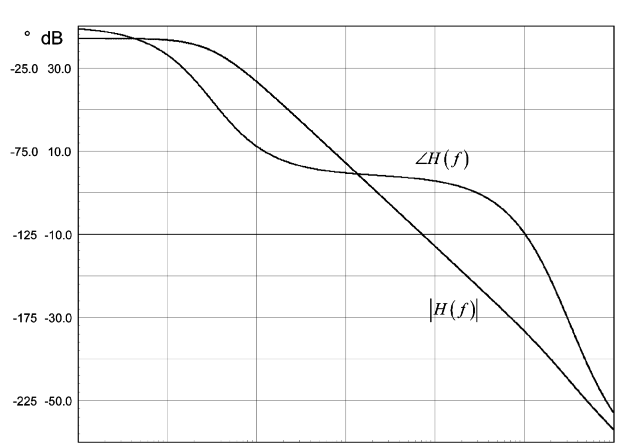

图 21　DCM PWM 开关和 CoPEC DCM 模型提供相同的动态响应

总　结

快速分析技术为推导线性电路传递函数提供了一种快速而高效的方法。在无源电路中,观察是可能的,而且是经常的,无需写一行代数就能得到传递函数。随着电路变得复杂和包括激励源,不得不采用经典的 KCL 和 KVL 分析。但当确定分子和分母中个别的多项式因子时,很容易跟踪错误和只关注错误项(如果有的话)。在复杂的电路中,小草图和 SPICE 的帮助是极其有用的。最后,最终结果以一种有意义的格式表示,并可直接识别出极点和零点位于何处,这是非常重要的,因为必须知道问题隐藏在传递函数的何处。作为一个设计人员,必须平衡它们,这样自然的产生传播或组件的变化不会危及系统在运行中的稳定性。

参考文献

[1] R D Middlebrook. Methods of Design-Oriented Analysis: Low-Entropy Expressions, Frontiers in Education Conference, Twenty-First Annual conference, Santa-Barbara, 1992.

[2] R D Middlebrook. Null Double Injection and the Extra Element Theorem[J]. IEEE Transactions on Education, 1989, 32(3).

[3] V Vorpérian. Fast Analytical Techniques for Electrical and Electronic Circuits[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[4] C Basso. Linear Circuit Transfer Functions - An Introduction to Fast Analytical Techniques, Wiley, 2016.

[5] V Vorpérian. Simplified Analysis of PWM Converters Using the Model of the PWM Switch, Parts I and II[J]. Transactions on Aerospace and Electronics Systems, 1990, 26(3).

[6] D Feucht. Design-Oriented Circuit Dynamics[EB/OL]. [2018-02]. http://www.edn.com/electronics-blogs/outside-the-box-/4404226/Design-oriented-circuit-dynamics

[7] D Peter. We Can do Better: A Proven, Intuitive, Efficient and Practical Design-Oriented Circuit Analysis Paradigm is Available, so why aren't we using it to teach our Students? [EB/OL]. [2018-03]. http://www.icee.usm.edu/ICEE/conferences/asee2007/papers/1362_WE_CAN_DO_BETTER__A_PROVEN__INTUITIVE__E.pdf.

[8] C Basso. Fast Analytical Techniques at Work with Small-Signal Modeling[EB/OL]. [2018-03]. http://cbasso.pagesperso-orange.fr/Spice.htm.

[9] J Betten. Benefits of a coupled-inductor SEPIC, slyt411, application note, Texas-Instruments.

[10] C Basso. Switch-Mode Power Supplies: SPICE Simulation and Practical Designs, McGraw-Hill, 2nd edition, 2014.

[11] D Maksimovic, R Erickson. Advances in Averaged Switch Modeling and Simulation, Power Electronic Specialist Conference Professional Seminar, Charleston, 1999.

（责任编辑：薛士然　收稿日期：2018-03-02）